КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А.М. Анчиков, Р.Л. Валиуллин, Р.А. Даишев

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ.

Казань 2006

УДК 517.5

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета физического факультета
Казанского государственного университета

Рецензент — к.ф.-м.н., доцент М.П. Желифонов

А.М. Анчиков, Р.Л. Валиуллин, Р.А. Даишев. Введение в математический анализ в вопросах и задачах. — Казань, 2006.

Данное пособие предназначено для студентов 1-го курса физического факультета. Оно призвано помочь студентам, только что поступившим на первый курс физического факультета Казанского государственного университета, преодолеть барьер между школьной и вузовской математикой, между способами изучения математики в средней школе и на физическом факультете университета. В нём кратко излагаются основные понятия, определения и теоремы по методам математической индукции, теории числовых последовательностей, функций одного аргумента, их пределов и непрерывности. В каждом параграфе предлагаются контрольные вопросы и задания, приводятся решения множества примеров и задач, а также приводятся задачи и упражнения, предназначенные для самостоятельной работы. Приводятся ответы и указания к решению наиболее трудных задач.

Указатель основных обозначений.

N - множество натуральных чисел,

Z - множество целых чисел,

R - множество вещественных чисел,

C - множество комплексных чисел,

$[\, a,\ b\,]$ - сегмент, (отрезок),

$[\, a,\ \infty\,), (\, a,\ \infty\,), (\, -\infty,\ a\,], (\, -\infty,\ a\,)$ - полупрямая,

$\exists\, x$ - существует такое x ,

$\forall\, x$ - для любого x,

$x \in X$ - число x принадлежит множеству X,

"ε- окрестность" точки $a -$ на числовой оси - интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$;
на комплексной плоскости - открытый круг $|z - a| < \epsilon$,

$n_\varepsilon \in N$ - натуральное число, зависящее от $\varepsilon > 0$,

n_M - натуральное число, зависящее от M(M может быть сколь угодно большим).

§1. Метод математической индукции.

А. Основные понятия и теоремы.

Доказательство верности гипотез в науке осуществляется экспериментальным, индуктивным или дедуктивным методами.

Дедуктивный метод - переход от общих утверждений к частным.

Индуктивный метод - метод рассуждения, при котором на основе рассмотрения нескольких частных предложений делается заключение об общем.

Полная индукция. Рассмотрим следующее утверждение. "Каждое четное натуральное число ... в пределах от 1 до 100 представимо в виде суммы двух простых чисел." Для этого перебираются все такие числа и выписываются соответствующие разложения:

$4 = 2+2;\ 6 = 3+3;\ 8 = 5+3;\ ......;\ 98 = 93+5;\ 100 = 97+3.$

Эти 49 равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представимо в виде суммы двух простых чисел. Общее утверждение доказано здесь перебором всех возможных частных случаев.

Такой метод перебора конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называется полной индукцией. Этот метод имеет весьма ограниченную область применимости в математике.

Неполная индукция. Иногда общий результат удается предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев. Здесь мы имеем неполную индукцию. Результат, полученный неполной индукцией, остается, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи. Неполная индукция может привести к ошибке.

Рассмотрим пример. Двухчлен $x^n - 1$, где n - натуральное число, разложим на множители с целыми коэффициентами. Рассмотрим эти разложения при многих частных значениях n. Все коэффициенты разложения по абсолютной величине не превосходят единицы В самом деле,

$$(x-1) = x-1,$$

$$(x^2-1) = (x-1)(x+1),$$
$$(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1),$$
$$(x^4-1) = (x-1)(x+1)(x^2+1),$$
$$(x^5-1) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$
$$(x^6-1) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

....

Попытки доказать этот факт для всякого n успеха не имели. Оказалось, что указанным свойством обладают все двухчлены $x^n - 1$, степень которых меньше 105. Двухчлен $x^{105} - 1$ имеет один из множителей, равный $x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 - x^2 + x + 1$, который не обладает указанным выше свойством.

Можно привести множество других примеров, которые позволяют сделать простой и в то же время важный вывод.

Утверждение может быть справедливым в целом ряде случаев и в то же время несправедливым вообще.

Теперь возникает вопрос. Имеется утверждение, справедливое в нескольких частных случаях. Все частные случаи рассмотреть невозможно. Как же узнать, справедливо ли утверждение вообще? Этот вопрос иногда удается решить посредством применения особого метода рассуждений, называемого методом математической индукции.

В основе этого метода лежит принцип, заключающийся в следующем:

Пусть $A(n)$ - предложение (утверждение), зависящее от натурального числа n. Тогда, если 1°. $A(n)$ справедливо при $n = n_0 \geq 1$; 2°. для любого $n = k \geq n_0$ из справедливости $A(k)$ следует справедливость $A(k+1)$, то предложение $A(n)$ справедливо для всех $n \geq n_0$.

Итак, при пользовании этой теоремой мы должны проверить выполнение двух условий:

1) Предложение справедливо для $n = n_0 \geq 1$ (это базис индукции),

2) Предложение справедливо для $n = k+1$ если оно справедливо для $n = k$, где k - произвольное натуральное число не меньшее n_0 (это индукционный шаг).

Б. Контрольные вопросы и задания.

1. Приведите примеры дедуктивного и индуктивного рассуждений.

2. Что называется полной индукцией? Привести пример.

3. Приведите пример неполной индукции, которая приводит к ошибочным выводам.

4. В чем состоит метод математической индукции? Из каких этапов он состоит?

5. В чем принципиальные различия между рассуждением, опирающимся на неполную индукцию, и методом математической индукции?

6. Что общего у всех задач, которые решаются методом математической индукции?

B. Примеры решения задач.

Пример 1. Доказать, что при $\forall n \in N$ справедливо равенство

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

Решение. Сначала вычислим последовательные суммы нечетных чисел: $1 = 1^2$, $1+3 = 4 = 2^2$, $1+3+5 = 9 = 3^2$, $1+3 = 5 = 7 = 16 = 4^2$. Можно ожидать, что прибавив к предыдущей сумме следующее нечетное число 9, получим квадрат числа 5, т.е. 25. И действительно, $1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$. После этого мы выдвигаем гипотезу, что имеет место утверждение (1). Первая часть математической индукции справедлива. Теперь проверим выполнение второй части, т.е. если для $\forall k$ имеет место

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2, \qquad (2)$$

то будет выполнено равенство

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2. \qquad (3)$$

Для доказательства к обеим частям (2) прибавим $(2k+1)$: $[1+3+5+...+(2k-1)]+(2k+1) = k^2+(2k+1)$. Но, по предположению, выражение в квадратных скобках равно k^2. В результате получим тождество $k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Итак, (1) справедливо при $n=1$, а из его справедливости при $n=k$ вытекает справедливость и при $n=k+1$. Тогда из справедливости при $n=1$ следует, что оно справедливо и при $n=1+1=2$, а тогда оно справедливо и при $n=2+1=3$, и при $n=3+1=4$ и вообще при всех $n \in N$.

Пример 2. Доказать, что при $\forall n \in N$ и $\forall x \geq -1$ справедливо неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \tag{4}$$

а при $x=0$ справедливо равенство.

Решение. При $n = 1$ соотношение (4) справедливо, поскольку обращается в верное равенство. Далее предположим, что соотношение (4) справедливо для натурального числа k и $x > -1$:

$$(1+x)^k \geq 1+kx. \tag{5}$$

Так как $x > -1$, то $1+x > 0$. Умножим неравенство (5) на положительное число $1+x$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+kx+x+kx^2.$$

Отбрасывая неотрицательное число kx^2 в правой части, получаем неравенство

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Этим доказано, что (5) справедливо для натурального числа $k+1$ и $x > -1$. Тем самым доказано, что (5) справедливо при $\forall n \in N$ и $x > -1$.

Пример 3. Найти сумму

$$S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + ... + (-1)^n n. \tag{6}$$

Решение. Рассмотрим $S_1,\ S_2,\ ...S_6$: $S_1 = -1,\ S_2 = -1 + 2 = 1,\ S_3 = S_2 - 3 = -2,\ S_4 = S_3 + 4 = 2,\ S_5 = S_4 - 5 = -3,\ S_6 = S - 5 + 6 = 3$. С другой стороны:

$$1 = \left[\frac{1+1}{2}\right] = \left[\frac{2+1}{2}\right],\ 2 = \left[\frac{3+1}{2}\right] = \left[\frac{4+1}{2}\right],$$

$$3 = \left[\frac{5+1}{2}\right] = \left[\frac{6+1}{2}\right].$$

Здесь под $[a]$ понимается целая часть числа a . Отсюда имеем гипотезу:

$$S_n = (-1)^n \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{7}$$

Для натуральных значений $1,\ 2,\ ...\ 6$ соотношение (7)справедливо.

Предположим, что $\forall k > 6$ соотношение (7)справедливо:

$$S_k = (-1)^k \left[\frac{k+1}{2}\right]. \tag{8}$$

Далее

$$\mathrm{S_{k+1}} = S_k + (-1)^{k+1}(k+1) = (-1)^k \left[\frac{k+1}{2}\right] + (-1)^k(k+1) =$$

$$= (-1)^{k+1}\left(k + 1 - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right).$$

Заметим, что для $\forall n \in N,\ [\frac{n}{2}] + [\frac{n+1}{2}] = n$. Используя предыдущее равенство, имеем $\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{k}{2}\right]=k+1$. Откуда $(k+1)-\left[\frac{k+1}{2}\right]=\left[\frac{k+2}{2}\right]$. Значит, приходим к $S_{k+1}=(-1)^{k+1}\left[\frac{k+2}{2}\right]$. Тем самым мы доказали справедливость равенства (7).

Пример 4. Найти $S_n=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!$.

Решение. Сначала находим $S_1=1\cdot 1!=1$ или $S_1=2!-1$, $S_2=S_1+2\cdot 2!=5$ или $S_2=3!-1$, $S_3=S_2+3\cdot 3!=23$, или $S_3=4!-1$, $S_4=S_3+4\cdot 4!=119$ или $S_4=5!-1$, откуда следует гипотеза

$$S_n=(n+1)!-1. \tag{9}$$

Покажем справедливость (9) при любых n. При $n=1$ гипотеза верна. Пусть она верна при $\forall\, k>1$.

$$S_k=(k+1)!-1. \tag{10}$$

Далее вычисляем S_{k+1}.

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+1)!=[(k+1)!-1]+(k+1)(k+1)!=$$

$$=(k+1)!\,[1+k+1]-1=(k+1)!\,(k+2)-1=(k+2)!-1.$$

Отсюда следует справедливость (9) и при $n=k+1$. Значит мы доказали справедливость (9) при $\forall\, n\in N$.

Пример 5. Доказать, что

$$\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}, \tag{11}$$

где $x\neq 2\pi m$, а $m-$ целое число.

Решение. При $n = 1$ равенство (11)имеет место. Пусть при $n = k$

$$\sum_{s=1}^{k} \sin sx = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2}. \tag{12}$$

Тогда (при $n = k + 1$)

$$\sum_{s=1}^{k+1} \sin sx = \sum_{s=1}^{k} \sin sx + \sin(k+1)x =$$

$$= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} + \sin(k+1)x =$$

$$= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} + 2\sin \frac{k+1}{2}x \cdot \cos \frac{k+1}{2}x =$$

$$= \sin \frac{k+1}{2}x \cdot \frac{\sin \frac{kx}{2} + 2\cos \frac{k+1}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \sin \frac{k+1}{2}x \cdot \frac{\sin \frac{k+2}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Показали, что (11) справедливо и при $n = k + 1$. Следовательно, (11) имеет место при $\forall\, n \in N$.

Пример 6. Доказать, что для любых n положительных чисел $x_1,\ x_2,\ ..., x_n$ удовлетворяющих условию

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1, \tag{13}$$

имеет место соотношение

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n. \tag{14}$$

Решение. При $n = 1$ из условия (13) следует $x_1 = 1$. Поэтому (14) выполнено.

Пусть при $n = k$ из (13) следует соотношение (14) и пусть $k + 1$ положительных чисел $x_1,\ x_2,\ ..., x_k, x_{k+1}$ удовлетворяют условию (13). Докажем, что для них выполнено соотношение (14). Если все эти числа равны 1, то их сумма $k+1$ и соотношение (14) имеет место. Предположим, что среди них имеется хотя бы одно число, отличное от 1. Тогда обязательно найдется ещё одно число, не равное 1. Причем, если одно из них больше единицы, то второе меньше 1. Не нарушая общности, предположим, что $x_k > 1$, $x_{k+1} < 1$. Возьмем произведение чисел x_1, x_2, $..., x_{k-1}, x_k \cdot x_{k+1}$. Это произведение равно 1. Поэтому по индукционному предположению $x_1+x_2+...+x_{k-1}+x_k \cdot x_{k+1} \geq k$. Прибавляя к обеим частям последнего соотношения $x_k + x_{k+1}$, получаем $x_1+x_2+...+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}+x_k \cdot x_{k+1} \geq k+x_k+x_{k+1}$, или $x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} \geq k+1+x_k+x_{k+1} - x_{k+1}x_k \cdot x_{k+1} - 1 = k+1+(1-x_{k+1})(x_k-1) \geq k+1$, так как $(1-x_{k+1})(x_k-1) > 0$.

Мы доказали справедливость (14) при $n = k+1$ и, тем самым и для $\forall\, n \in N$.

Пример 7. Доказать, что при $\forall\, n \in N$, справедливо тождество

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}. \quad (15)$$

Решение. При $n=1$ равенство справедливо, т.е. $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Пусть при $n=k$ справедливо равенство (15), т.е.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}. \quad (16)$$

Запишем теперь доказуемое равенство (15) для $n = k+1$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$= \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}. \qquad (17)$$

Вычитая почленно из (17) тождество (16), приходим к тождеству

$$\frac{1}{2\mathrm{k}+1} - \frac{1}{2(k+1)} \equiv \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}. \qquad (18)$$

Отсюда следует, что если (16) имеет место, то в силу математической индукции (15) справедливо для всех значений n.

Заметим, что в некоторых случаях оказывается полезно разделить друг на друга соответствующие части доказываемых тождеств.

С помощью метода математической индукции можно доказывать различные утверждения, касающиеся делимости натуральных чисел.

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для $\forall\, n \in N$ справедливы следующие равенства:

1. $1 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
4. $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$;
5. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$;
6. $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;
7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

8. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

9. $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad x\neq 2\pi m$;

10. $\cos x\cdot\cos 2x\cdot...\cdot\cos 2^n x=\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\cdot\sin x},\quad x\neq\pi m$;

11. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

12. $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

Найти значения сумм S_n :

13. $S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; $\quad\left[\frac{n}{3n+1}\right]$.

14. $S_n=1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-...+(-1)^n\frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}$; $\left[(-1)^n\frac{(x-1)...(x-n)}{n!}\right]$.

Найти значение выражений:

15. $P_n=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})...(1-\frac{1}{n+1})$; $\quad\left[\frac{1}{1+n}\right]$.

16. $P_n=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{n^2}),\quad n\geq 2$; $\quad\left[\frac{n+1}{2n}\right]$.

Доказать:

17. $1+x+x^2+...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},\quad (x\neq 1)$;

18. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

19. $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+...+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$;

20. $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+...+n\sin nx=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$;

21. $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+...+n\cos nx=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$.

Применяя метод математической индукции:

22. Выразить n-й член арифметической, геометрической прогрессий через первый член соответственно. Найти значения сумм этих прогрессий.
$\left[a_n=a_1+(n-1)d,\ S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2};\quad b_n=b_1q^{n-1},\ S_n=b_1\frac{q^n-1}{q-1}\right]$.

23. Сочетаниями из n элементов по k называются такие соединения, которые отличаются друг от друга только своими элементами. $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k. Пользуясь этой формулой, легко убедиться в справедливости следующих равенств: $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$; $0! = 1$.

Доказать тождества:

$a)$ $C_n^k = C_n^{n-k}$;

$b)$ $C_{n+1}^n = C_n^k + C_n^{k-1}$;

$c)$ $C_n^m C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$;

$d)$ $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$;

$e)$ $\dfrac{C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n}{n} = 2^{n-1}$.

24. Применяя метод математической индукции, получить формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n a^0 b^n. \quad (19)$$

25. Доказать тождества:

$a)$ $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$; ;

$b)$ $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

26. Доказать формулу:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_s)^2 = \sum_{i=1}^{s} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j. \quad (20)$$

По аналогии получить также разложение $(\sum\limits_{i=1}^{s} a_i)^n$.

27. Решить уравнения:

$a)$ $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^{3} = 7(x-1);$ $\quad [x=5]$.

$b)$ $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14;$ $[x=7]$.

28. Третье слагаемое разложения $(2x + \frac{1}{x^2})^m$ не содержит x. При каких значениях x это слагаемое равно второму слагаемому разложения $(1+x^3)^{30}$? $[\, x = 2\,]$.

Доказать:

29. $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

30. $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot ... \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n; \;\; \forall n \geq 2.$

31. $2^n > 2n + 1; \;\; \forall n \geq 3.$

32. $(0,7)^n \geq 1 - 0,3n.$

33. $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n,$
где $x_1, \; x_2, \; ..., \; x_n -$ числа одного знака, большие -1 (неравенство Бернулли).

34. $a)$ $2^n > n^2, \; n = 1, \; \forall n \geq 5;$ $\quad b)$ $3^n > n^3, \; n \geq 4, \; n = 1, 2.$

35. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \;\; \forall n \geq 2.$

[Воспользоваться неравенством $\frac{1}{\sqrt{1+k}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$].

36. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} > n!, \;\; \forall n \geq 3.$

37. $n^{\frac{n}{2}} < n! < (\frac{n+1}{2})^n, \;\; \forall n \geq 2.$

38. $\frac{2^{2n}}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \forall n \geq 2.$

39. $n^{n+1} > (n+1)^n, \;\; \forall n \geq 3.$

40. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$

41. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$, $a_i \geq 0$, $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ – среднее арифметическое, $\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ – среднее геометрическое n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
[Указание. Рассмотреть числа $\frac{a_i}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Произведение этих чисел равно 1. По примеру (6), разобранному выше, $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sqrt[n]{\prod\limits_{j=1}^{n} a_j}} \geq n$. Отсюда следует ответ].

42. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

43. $\sqrt[n+1]{a \cdot b^n} < \frac{a+nb}{n+1}$, $a > 0$, $b > 0$.

44. "n" корней $\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}} \leq \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$, $c > 0$.

45. Доказать:

$a)$ число $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ кратно 133;

$b)$ число $2^{2^n} + 1$ оканчивается на 7 при $n \geq 2$;

$c)$ $arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{8} + \ldots + arctg\frac{1}{2n^2} = arctg\frac{n}{n+1}$;

$d)$ $3^{2n} - 1$ делится на 8;

$e)$ $6^n + 20n - 1$ кратно 25.

§2. Комплексные числа.

А. Основные понятия и теоремы.

Рассмотрим упорядоченную пару (x, y) вещественных чисел x и y. Обозначим $z = (x, y)$. Пусть даны пары

$z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, для которых введем правила сложения и умножения соответственно:

$$1)\ \ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2), \tag{21}$$

$$2)\ \ z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1). \tag{22}$$

В этом случае упорядоченная пара (x, y) называется комплексным числом, x – вещественная часть $(x = Re\ z)$, y – мнимая часть $(y = Im\ z)$. Если $y = 0$, то пара $(x, 0)$ отождествляется с действительным числом x : $(x, 0) = x$. В частности пара $(0, 0)$ отождествляется с нулем. Множество всех комплексных чисел обозначим через C. Множество R является подмножеством C.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$, и $z_2 = (x_2, y_2)$, называются равными $z_1 = z_2$, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Легко проверить, что сумма и произведение комплексных чисел обладает теми же свойствами, что и сумма и произведение вещественных чисел.

Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое в сумме с z_2 дает z_1. Покажите самостоятельно, что $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$.

Частным двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое при умножении на z_2 дает z_1. Покажите самостоятельно, что

$$z = \frac{z_1}{z_2} = (\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}). \tag{23}$$

Число $(0, 1) = i$ называется мнимой единицей. Возведя это число в квадрат, получим в силу определения произведения комплексных чисел: $(0,1)(0,1) = (-1,0)$, $i^2 = -1$. Заметив это, мы можем любое комплексное число $z = (x, y)$ представить в виде $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$. Представление $z = (x, y)$ в виде $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа. Это представление позволяет производить операции с комплексными числами, как они производятся с алгебраическими многочленами.

Комплексное число $(x, -y) = x - iy$ называется сопряженным по отношению к числу $(x, y) = x + iy$ и обозначается $\overline{z}$ (т.е. $\overline{z} = x - iy$).

Комплексное число $z = (x, y)$ изображается или точкой M с координатами (x, y) , или вектором $\overrightarrow{OM}$, идущим из начала координат O в точку M на плоскости. При этом плоскость называется комплексной плоскостью. В декартовой системе координат ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат - мнимой осью. Введя полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ на плоскости, комплексное число z можно представить в виде:

$$z = (x + iy) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{24}$$

Эта форма числа называется тригонометрической формой комплексного числа, r и φ называются модулем и аргументом комплексного числа и обозначаются символами $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Ясно, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $tg\ \varphi = \frac{y}{x}$. Аргумент числа $z \neq 0$ определен лишь с точностью до целого, кратного 2π. $Arg z = \arg z + 2k\pi, (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$, где $\arg z$ - главное значение аргумента $(-\pi \leq \arg z < \pi)$.

В тригонометрической форме удобно производить операции умножения и деления комплексных чисел:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{25}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad r_2 \neq 0, \tag{26}$$

то есть при умножении модули перемножаются, аргументы складываются, а при делении модули делятся, а аргументы вычитаются. (Покажите это самостоятельно).

Произведение n множителей, каждый из которых равен z, называется $n-$ степенью комплексного числа z и обозначается символом z^n. Получим

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\ \sin n\varphi) \tag{27}$$

(формула Муавра).

Комплексное число w называется корнем $n-$й степени из числа z (обозначается $\sqrt[n]{z}$) если $w^n = z$. легко получить

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = \overline{0,\ (n-1)}. \tag{28}$$

Если пользоваться формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\ \sin\varphi$ (здесь мы её не доказываем), тригонометрическая форма переходит

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \tag{29}$$

Представление комплексного числа z в виде $z = re^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа.

Можно вычислить логарифм комплексного числа:

$$\ln z = \ln r + i\varphi.$$

Так как аргумент комплексного числа φ определяется с точностью до $2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ то

$$Ln\ z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k) = \ln z + i2\pi k. \qquad (30)$$

Пользуясь этой формулой можно вычислить логарифм любого отрицательного числа. Например, $Ln(-5) = \ln 5 + i(\pi + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ так как $|-5| = 5, \arg(-5) = \varphi = \pi$.

Б. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте геометрическую интерпретацию комплексному числу $\overline{z},$; сопряженному по отношению к комплексному числу z.

2. Покажите, что комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равно нулю сопряженное к нему число.

3. Покажите, что частное двух комплексных чисел z_1 и z_2 можно получить, если числитель и знаменатель умножить на число, комплексно сопряженное к знаменателю.

4. Сколько различных значений можно получить при извлечении корня n степени из комплексного числа z ? Положите, в частности $z = -1, n = 2$.

5. Покажите, что правила сложения и вычитания комплексных чисел идентичны правилам сложения и вычитания векторов.

6. Пользуясь интерпретацией комплексного числа как вектора на комплексной плоскости, докажите неравенства: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

7. Покажите, что модуль разности комплексных чисел имеет геометрический смысл расстояния между соответствующими точками на комплексной плоскости.

8. Покажите, что

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \overline{k = 0, n-1},$$

расположены в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

9. Покажите, что e^z не обращается в нуль ни в одной точке комплексной плоскости z.

10. Покажите, что если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_2 \neq 0$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \;\; \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \;\; z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

11. Покажите, что $e^{i2\pi k} = 1$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

12. Покажите, что формула умножения комплексных чисел z_1 и z_2 получается, если формально перемножить двучлены $x_1 + i\, y_1$ и $x_1 + i\, y_2$ по обычному правилу умножения двучленов, а затем заменить i^2 на -1.

B. Примеры решения задач.

Пример 8. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 7 - 8i$.

Решение. $z_1 + z_2 = (-2+7) + (3-8)i = 5 - 5i$. Произведение находим формальным перемножением двучленов $(-2 + 3i)$ и $(7 - 8i)$: $z_1 \cdot z_2 = (-2 + 3i) \cdot (7 - 8i) = 14 + 16i + 21i - 24i^2 = 10 + 37i$.

Пример 9. Даны комплексные числа $z_1 = -1 + 6i$ и $z_2 = 2 + 5i$. Найти разность $z_2 - z_1$ и частное $\frac{z_2}{z_1}$.

Решение. $z_2 - z_1 = (2+5i) - (-1+6i) = 3 - i$. Частное находим по формуле (23):

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+5i}{-1+6i} = \frac{(-1)\cdot 5 - 2\cdot 6}{(-1)^2 + (6)^2} = \frac{28}{37} - i\frac{17}{37}.$$

Пример 10. Выполнить действия $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$.

Решение. Перемножив числа, стоящие в знаменателе, получим

$$\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{3+i}{1-2i+i+2} = \frac{3+i}{3-i}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, тогда

$$\frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{9+6i-1}{9+1} = \frac{4}{5} + i\frac{3}{5}.$$

Пример 11. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$ и записать его в тригонометрической форме.

Решение. $r = |z| = \sqrt{3+1} = 2, tg\varphi = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; при нахождении φ учтем, что комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$ расположено во втором квадранте. Следовательно, $\varphi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. $z = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$.

Пример 12. Найти произведение чисел $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11}{4}\pi + i\sin\frac{11}{4}\pi)$ и $z_2 = \sqrt{8}(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)$.

Решение. Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой (25). $r_1 = |z_1| = \sqrt{2}$, $r_2 = |z_2| = \sqrt{8}$, $r = r_1 r_2 = 4$. Аргумент произведения $z_1 z_2$ есть сумма $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11}{4}\pi + \frac{3}{8}\pi = \frac{9}{8}\pi + 2\pi$. Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 4(\cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi)$.

Пример 13. Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z = \frac{(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})(\sqrt{3}+i)}{i-1}.$$

Решение. Число $z_1 = (\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$ имеет модуль, равный 1 и аргумент $\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$. Число $z_2 = \sqrt{3}+i$ имеет модуль 2 и аргумент $\varphi_2 = -\frac{3}{4}$. Число $z_3 = i-1$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргумент $\frac{3\pi}{4}$. Поэтому

$$|z| = \frac{|z_1|\,|z_2|}{z_3} = \frac{1\cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\;\; \varphi = \varphi_1+\varphi_2-\varphi_3 = -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{3}{4}\pi =$$

$= -\frac{11}{12}\pi$. Следовательно, $z = \sqrt{2}(\cos\frac{11}{12}\pi - i\sin\frac{11}{12}\pi)$.

Пример 14. Возвести в девятую степень комплексное число $z = \sqrt{3}-i$.

Решение. $r = |z| = 2, \varphi = -\frac{\pi}{6}$.

$$(\sqrt{3}-i)^9 = 2^9[\cos(-\frac{\pi}{6}\cdot 9)+i\sin(-\frac{\pi}{6}\cdot 9)] = 2^9[\cos\frac{3}{2}\pi - i\sin\frac{3}{2}\pi] = 512i.$$

Пример 15. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Запишем число $z = -16$ в тригонометрической форме: $z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$. Согласно формулам (28) получаем:

$$w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$w_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$w_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}-i\sqrt{2},$$

$$w_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Пример 16. Представить в показательной форме комплексное число $z = \frac{\sqrt{3}}{8} - i\frac{1}{8}$.

Решение. $|z| = r = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$. $tg\varphi = -\frac{1}{3}$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (т.к. z находится в четвертом квадранте), $z = \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Пример 17. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показательной форме.

Решение.

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[4]{2e^{i\pi/6}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{12k+1}{24}\pi}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2, если

$a)$ $z_1 = 4 + 5i,\ z_2 = 3 - 2i;$ $[7 + 3i;\ 22 + 7i]$.

$b)$ $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i,\ z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i;$ $[2\sqrt{2}\ ; 5]$.

2. Найти разность $z_2 - z_1$ и частное ${z_2}/{z_1}$ комплексных чисел z_1 и z_2, если

$a)$ $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 0,4 - 0,2i;$ $[-2;\ 6 - 4,2i]$.

$b)$ $z_1 = \sqrt{5} - i,\ z_2 = \sqrt{5} - 2i;$ $[-i;\ {7}/{6} - i{\sqrt{5}}/{6}]$.

3. Выполнить действия:

$a)$ $2i(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i);$ $[-2i]$. $b)$ $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i};$ $[0]$.

$c)$ $\frac{(1+i)}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})};$ $[\frac{1}{4}(1-i)]$.

4. Найти координаты точки M, изображающей комплексное число $z = \dfrac{5i-2}{3i+1} + i + \dfrac{8i-3}{2-i}$. [$M(-1,5;\quad 4,7)$]

5. Найти действительные части комплексных чисел:

$a)$ $z = \dfrac{(2-i)^3}{3+4i}$; [$\mathrm{Re}z = -1,52$]. $b)$ $z = \dfrac{(1+i)^3}{1-i} + \dfrac{1}{i^{10}}$; [$\mathrm{Re}z = -3$].

6. Выполнить действия: $a)$ $\dfrac{i^{13}-i^{14}}{1+i^{15}} + i^{10}$; [$-1+i$].

$b)$ $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$; [$\dfrac{22}{159} - \dfrac{5}{318}i$].

7. При каких действительных значениях a комплексное число $z = (1-ai)^3 - (2+ai)^2$ является : $a)$ действительным, $b)$ чисто мнимым?
[$a)$ при $a = -\sqrt{7}$, $a = 0$, $a = \sqrt{7}$; $b)$ ни при каком a].

8. Определить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = y^2 - 7y + 9xi$ и $z_2 = -12 + 20i + x^2 i$ равны. [4; 3].

9. Решить уравнения:

$a)$ $(1+2i)(z-i) + (4i-3)(1-iz) + 1 + 7i = 0$; $[-1-i]$.

$b)$ $z^2 + \overline{z} = 0$; $[0, -1, \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i]$.

10. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases}$$

[$z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$].

11. Доказать равенства:

$$a)\ \ \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}\ ; \qquad b)\ \ \overline{\left({}^{z_1}\!/_{z_2}\right)} = {}^{\overline{z_1}}\!/_{\overline{z_2}}\ ;$$

$$c)\ \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ ; \qquad\qquad d)\ \ \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n.$$

12. Доказать равенства:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ .$$

13. На комплексной плоскости даны точки $z_2,\ z_2,\ z_3,$ являющиеся тремя последовательными вершинами параллелограмма. Найти четвертую вершину. $[z_1 + z_3 - z_2\ ]$.

14. Найти множество точек комплексной плоскости, заданное условием:

$a)\ |z+1| = 1; \quad b)\ |z+2i-1| \le 2; \quad c)\ |z-2|^2 + |z+2|^2 = 26;$

$d)\ \sin|z| > 0.$

[a) Окружность $R = 1$, центр в точке $z = -1$. b) Круг с границей, $R = 2$, центр в точке $z = 1 - 2i$. c) Окружность, $R = 3$, центр в точке $z = 0$. d) Система концентрических полей.]

15. Представить комплексное число z в тригонометрической форме:

$$a)\ z = -\sqrt{3} + i, \quad b)\ z = -1, c) z = i, \quad d)\ z = -\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\ .$$

[$a)\ \ 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi);\quad b)\ \ \cos\pi + i\sin\pi;\quad c)\ \ \cos\frac{\pi}{2} +$ $+\, i\ \sin\frac{\pi}{2};\quad d)\ \ \cos\frac{13}{12}\pi +\ i\ \sin\frac{13}{12}\pi.$]

16. Записать комплексное число z в алгебраической и тригонометрической формах:

$$a)\ z = \frac{\cos 5\pi/3 + i\sin 5\pi/3}{\cos \pi/6 + i\sin\pi/6};$$

$$b)\ \ z = {}^{1}\!/\!(\cos 4\pi/3 - i\sin 4\pi/3); \quad c)\ \ z = \frac{i}{(1+i)^2}.$$

[$a)\ \ z = 1 = \cos 0 + i\sin 0;$ $\quad b)\ \ z = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3};$

$c)\ \ z = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i\sin 0)$].

17. Записать комплексное число z в алгебраической форме:

$$a)\ \ z = (\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})^{12}; \quad b)\ \ z = (\cos 31^0 + i\sin 31^0)^{-10}.$$

[$a)$ 1; $\quad b)$ $(\cos 50^0 + i\sin 50^0)$].

18. Записать комплексное число z в тригонометрической форме: $\quad a)\ \ z = (\sqrt{3} - i)^{100}$; $\quad b)\ \ z = (\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1})^6$.

[$a)\ \ 2^{100}\ (\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$; $\qquad b)\ \ 8\ (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$].

19. При каких целых значениях n справедливо равенство $(1+i)^n = (1-i)^n$? $\quad$ [$n = 4k,\ \ k = 0, 1, 2, ...$].

20. Найти все значения $\sqrt[n]{z}$, если: $a)\ z = -1,\ n = 3;$ $b)\ z = 8i,\ n = 3;$ $\quad c)\ \ z = 1,\ n = 5.$

[$a)\ \ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ -1,\ \ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\qquad b)\ \ \sqrt{3} + i,\ \ -\sqrt{3} + i,\ \ -2i$;

$c)\ \ \cos 2\pi k/5 + i\sin 2\pi k/5;\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4.$]

21. Извлечь корни из комплексных чисел:

$a)\ \ \sqrt[3]{-125};$ [$2,5 + 2,5\cdot\sqrt{3}\cdot i;\ \ -5;\ \ 2,5 - 2,5\cdot\sqrt{3}\cdot i$];

$b)$ $\sqrt{-6+6\sqrt{3}i}$; [$\sqrt{3}+3i$; $-\sqrt{3}-3i$];

$c)$ $\sqrt[6]{-64}$; [$\sqrt{3}+i; 2i$; $-\sqrt{3}+i$; $-\sqrt{3}-i$; $-2i$; $\sqrt{3}-i$].

22. Найти действительное число b из условия, что точки, изображающие комплексные числа $3-5i$, $1-i$ и $-2+bi$, лежат на одной прямой. [$b=5$]

23. Дано комплексное число $z=\sqrt{3}-i$. Найти все комплексные числа $\widehat{z}$; такие, что $|\widehat{z}|=2\,|z|$, а $|\arg\widehat{z}-\arg z|=\frac{\pi}{3}$. [$\widehat{z}_1=-4i$; $\widehat{z}_2=2\sqrt{3}+2i$].

24. Решить уравнения:

$a)$ $z^2+3\,|z|=0$; [$z_1=0, z_2=3i$, $z_3=-3i$].

$b)$ $z^2-3\overline{z}=0$; [$z_1=0$; $z_2=3$].

25. Найти z^6, если $3z-\overline{z}=-4+8i$; [$512\,i$]

26. Решить уравнения: $a)$ $z^4+1=0$, $b)$ $z^2=\overline{z}^3$.

[$a)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm1\pm i)$; $b)$ 0, $\cos 2\pi k/5+i\sin 2\pi k/5$; $k=0,1,2,3,4.$]

27. Решить уравнения:

$a)$ $z^2-4iz+6(2-5i)=0$; [$z_1=3+7i$; $z_2=-3-3i$].

$b)$ $z^2-(5+2i)z+9+7i=0$; [$z_1=2+3i$; $z_2=3-i$].

$c)$ $|z|\,z+az+i=0, a\geq 0$; [$z=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2+4})i$].

$d)$ $z^2-5z+7-i=0$; [$z_1=3+i$; $z_2=2-i$].

$e)$ $z^2-(4+i)z+10+2i=0$; [$z_1=2+3i$; $z_2=2-2i$].

$f)$ $(z+1)^4=(z-1)^4$; [$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$; $z_2=0$; $z_3=-1+i$].

$g)$ $|z|+z=2+i$; [$\frac{3}{4}+i$].

28. Вычислить:

$a)$ $1+z+z^2+...+z^{19}$, если $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\qquad [\, 1+(1+\sqrt{2})\ i\,].$

$b)$ $\sin x + a\sin 2x + ... + a^{n-1}\sin nx$; $\quad \left[\ \frac{a^{n+1}\sin nx + a^n \sin(n+1)x - \sin x}{a^2-2a\cos x+1}\right].$

$c)$ $C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + ... + C_n^n \sin nx$; $\qquad [\, 2^n\cdot\cos^n\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}\,].$

$d)$ $\sum\limits_{k=0}^{100} C_{100}^k(\sqrt{3}i)^k$; $\qquad [\, -2^{99}\cdot(1+i\sqrt{3})\,].$

29. Возвести в степень:

$a)$ $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$; $\qquad [\, 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2})\,].$

$b)$ $(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$; $\ [\, 2^n\sin^n\frac{\varphi}{2}(\cos n(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})+i\sin n(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})\,].$

30. Представить в алгебраической форме:

$a)$ $z=e^{2-i}$; $\quad b)$ $z=e^{-3\pi i/2+12\pi i}$ $\quad c)$ $z=i^i$.

[$a)$ $e^2(\cos 1 - i\sin 1)$; $\quad b)$ i; $\quad c)$ $e^{-(\pi/2+2\pi k)}$, $\quad k=0,\pm1,\pm2,...$].

31. Представить в показательной форме комплексные числа:

$a)$ $z=-\sqrt{12}-2i$; $\quad b)$ $z=-\cos\pi/7+i\sin\pi/7$.

[$a)$ $4e^{7\pi i/6}$; $\qquad b)$ $e^{6\pi i/7}$].

32. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{z}$:

$a)$ $z=1$, $n=3$; $\quad b)$ $z=-1$, $n=5$; $\quad c)$ $z=-4+\sqrt{48}i$, $n=3$;

$d)$ $z=-1-\sqrt{3}i$, $n=4$.

[$a)$ $e^{2\pi ki/3}$, $k=0,1,2$; $\quad b)$ $e^{\pi(2k+1)i/5}$, $k=\overline{0,4}$; $\quad c)$ $2e^{2(3k+1)\pi i/9}$, $k=0,1,2$; $\quad d)$ $\sqrt[4]{2}e^{\pi(3k+2)i/6}$, $k=\overline{0,3}$].

33. Вычислить логарифмы следующих комплексных чисел:

$a)\ \ -10;\quad b)\ \ -1;\quad c)\ \ \dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}};\quad d)\,-2+3i.$

[$a)\ \ \ln 10+(2k+1)\pi\, i;\quad b)\ \ (2k+1)\pi\, i;\quad c)\ \ (2k\pm\frac{1}{4})\pi\, i,$

$d)\ \ \frac{1}{2}\ln 13+\Big((2k+1)\pi-arctg\frac{3}{2}\Big)\, i$].

34. Найти наименьшее по модулю комплексное число z, удовлетворяющее условию $|\ z-2+2i\ |=1$; [$(2-\frac{\sqrt{2}}{2})(1-i)$].

35. При каких вещественных a любое комплексное число z, удовлетворяющее равенству $\left|z-i\sqrt{2}\right|=(a+1)^2$, удовлетворяет одновременно неравенству $\left|z-\sqrt{2}\right|>a^2-4a$. [$a>\frac{1-\sqrt{3}}{2}$].

36. В круг радиуса r с центром в точке a вписан правильный n – угольник, одна из вершин которого - в точке $z_0=a+r$. Найти остальные вершины.
[$z_k=a+re^{2\pi ki/n}, k=\overline{1,n-1}$].

37. Выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:
$a)\ \cos 3\varphi;\ \ b)\ \sin 3\varphi;\ \ c)\ \cos 4\varphi;\ \ d)\ \sin 4\varphi.$
[$a)\ \ \cos^3\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi;\quad b)\ \ 3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi-\sin^3\varphi;\ \ c)\ \ \sin^4\varphi-6\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi+\cos^4\varphi;\quad d)\ \ \sin^3\varphi\cdot\cos\varphi-\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi$].

38. Доказать, что если $z+1/z=2\cos\theta$, то $z^m+1/z^m = 2\cos m\theta$.

39. Определить кривые и начертить их: $a)\ \ |z|=1-\mathrm{Re}z;$ $b)\ \ z=z_0+\alpha e^{it},\ \ 0\le t\le 2\pi;\quad c)\ \ z=ate^{it},\quad 0\le t<\infty;$ $d)\ z=t^2+{}^{i}\!/_{t^2},\ \ 0<t<\infty.$
[a) парабола; b) окружность; c) спираль Архимеда; d) одна ветвь гиперболы].

40. Начертить геометрические места точек:
$a)$ $r < |z-a| < R$; $b)$ $\mathrm{Im}z > 0, |z| > R$; $c)$ $\alpha < \arg(z-a) < \beta$.
$d)$ $|z| < 1 - \mathrm{Re}z$.

[a) круговое кольцо; b) верхняя полуплоскость без полукруга; c) бесконечный сектор с вершиной в точке a; d) внутренность параболы].

41. Выяснить геометрический смысл указанных соотношений: $a)$ $|z-z_1| = |z-z_2|$; $b)$ $|z| = \mathrm{Re}z + 1$; $c)$ $|2z| > |1+z^2|$; $d)$ $|z| < \arg z$, если $0 \le \arg z < 2\pi$; $e)$ $\mathrm{Re}z^2 = c$, $-\infty < c < +\infty$; $f)$ $\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z < 1$; $g)$ $\left|\frac{a-z}{\bar{a}-z}\right| < 1$, $\mathrm{Re}\, a > 0$.

[$a)$ прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2, и проходящая через середину этого отрезка; $b)$ парабола $y^2 = 2x+1$; $c)$ внутренность окружностей $|z-i| = \sqrt{2}$ и $|z+i| = \sqrt{2}$, за исключением их общей части; $d)$ внутренность области, ограниченной отрезком действительной оси $0 \le x \le 2\pi$ и одним витком спирали Архимеда $r = \varphi$; $e)$ семейство гипербол $x^2 - y^2 = c$; $f)$ полуплоскость, ограниченная прямой $x + y = 1$ и содержащая начало координат; $g)$ полуплоскость слева от мнимой оси].

§3. Числовая последовательность.

3.1. Предел последовательности. Предельные точки.

А. Основные понятия и теоремы.

1. Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, и $\{x_n/y_n\}$ называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$).

2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists\, M > 0$ такое, что $\forall n : |\, x_n \,| \leq M$.

3. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если $\forall\, M > 0 \quad \exists\, n : |\, x_n \,| > M$.

4. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon \in N$ такое, что $\forall\, n > n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

5. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся* , а последовательность, не имеющая предела - *расходящейся* .

Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

6.Число a называется *предельной точкой (или частичным пределом)* последовательности $\{x_n\}$, если в любой $\varepsilon-$ окрестности точки a содержится бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

7. Наибольшая (наименьшая) предельная точка $\{x_n\}$, ограниченная сверху (снизу), называется верхним (нижним) пределом этой последовательности и обозначается символом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ ($\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$).

Очевидно, что бесконечно большая последовательность не может иметь конечной предельной точки. В этом случае $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$, $(x_n > M, \forall n > n_0)$, ($\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$) $(x_n < -M, M > 0$, $\forall\, n > n_0)$.

Б. Контрольные вопросы и задания.

1. Сформулируйте определения: а) ограниченной сверху, б) ограниченной снизу, в) неограниченной, г) ограниченной последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих

определений.

2. Дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности.

3. Сколько пределов имеет сходящаяся последовательность?

4. Может ли последовательность иметь бесконечно много положительных (отрицательных) членов, если её предел: а) больше нуля, б) меньше нуля, в) равен нулю. Приведите примеры.

5. Всякая ли ограниченная последовательность сходится? Приведите пример.

6. Следует ли из сходимости $a)$ $\{x_n + y_n\}$, б) $\{x_n - y_n\}$, в) $\{x_n \cdot y_n\}$ сходимость $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$? Приведите примеры.

7. Пусть в любой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли отсюда, что: $a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; б) $\{x_n\}$ – ограничена?

8. Пусть имеются две различные точки, в любой окрестности которых содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Сходится ли эта последовательность?

9. Следует ли из расходимости $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ расходимость $a)$ $\{x_n + y_n\}$, б) $\{x_n - y_n\}$, в) $\{x_n \cdot y_n\}$? Привести примеры.

10. Нарушится ли сходимость последовательности, если а) добавить, б) удалить, в) изменить произвольным образом конечное число членов ?

11. Что является необходимым условием сходимости последовательности ?

12. Сформулируйте на языке "$\varepsilon - n_\varepsilon$" определение того, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$ и дайте геометрическую интерпретацию этого определения.

13. Всякая неограниченная последовательность стремится к

бесконечности. Верно ли это? Привести пример.

14. Является ли предел последовательности её предельной точкой? Ответ обоснуйте.

15. Если последовательность имеет единственную предельную точку, то она сходится. Верно ли это?

16. Всякая ли ограниченная последовательность имеет единственную предельную точку? Ответ обоснуйте примерами.

17. Покажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$.

B. Примеры решения задач.

Пример 18. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (-1)^n$, ограничена, так как все члены не могут быть меньше -1 и больше 1. Но она не имеет предела, т.е. не сходится.

Пример 19. Последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = n^{(-1)^n}$ ограничена снизу, не ограничена сверху, расходящаяся.

Решение. Действительно, у указанной последовательности 1, 2, 1/3, 4, 1/5, 6, 1/7 ... все члены положительны, члены с нечетными индексами убывают при увеличении n, а члены с четными индексами неограниченно возрастают, т.е. для $\forall\ M > 0$, $x_{2n} > M$, если $n > {}^{M}\!/_{2}$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу нулем, неограничена сверху. Необходимое условие сходимости не имеет места. Последовательность расходится.

Пример 20. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Решение. Для $\forall\, \varepsilon > 0$ $(\frac{n+1}{n} - 1) = \frac{1}{n} < \varepsilon$ для $\forall\, n > n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$. Для различных ε получим различные номера $n_\varepsilon \in N$. Для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ldots$ соответственно получим $n_\varepsilon =$

$10, 100, 1000, \ldots$ Это означает, что в первом случае элементы с индексом $n = 11$ и выше попадают в $\varepsilon -$ окрестность ($\varepsilon = 0,1$) точки 1, во втором случае все элементы, начиная с $x_{101} -$ в "$0,01$" - окрестность точки 1, в третьем случае все элементы, начиная с $x_{1001} -$ в "$0,001$" - окрестность точки 1 и т.д. В этом примере четко видна зависимость номера $n_\varepsilon \in N$ от произвольно заданного $\varepsilon > 0$.

Пример 21. Пусть $x_n = \frac{\sin n}{n}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Решение. В самом деле, $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > n_\varepsilon = [1/\varepsilon]$.

Пример 22. На языке $\varepsilon - n_\varepsilon$ доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Решение. Действительно, $\left|\frac{1}{n!} - 0\right| = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2} = $ $= \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Отсюда $1 < 2^{n-1}\cdot\varepsilon$, или $1/\varepsilon < 2^{n-1}$. Логарифмируя обе части этого неравенства, имеем $\log_2(1/\varepsilon) < n - 1$, или $n > 1 + \log_2(1/\varepsilon)$. $n_\varepsilon = [1 + \log_2(1/\varepsilon)]$.

Пример 23. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Решение. По определению, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Тогда $\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} < 2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n < \varepsilon$. Отсюда находим $(\frac{2}{3})^n < \frac{2}{9}\varepsilon$. Логарифмируя обе части этого равенства, получим $n\lg(\frac{2}{9}) > \lg(\frac{2}{9} \cdot \varepsilon)$. Итак, $n > \lg(\frac{2}{9} \cdot \varepsilon) \cdot \lg^{-1}(\frac{2}{3})$.

Пример 24.Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0$, если $|q| < 1$.

Решение. Рассмотрим $|n \cdot q^n| = n\Big/\left|\frac{1}{q}\right|^n = n/b^n$, где $b \equiv \left|1/q\right| > 1$. Далее перепишем $n/b^n = n/(1+s)^n$, где $s > 0$. Применяя в знаменателе формулу бинома Ньютона, получим $n/b^n = n/(1+s)^n = n/(1 + s\cdot n + s^2 \cdot n(n-1)/2! + \ldots + s^n) <$

$< {}^{2n}\!/_{n(n-1)s^2} = {}^{2}\!/_{(n-1)s^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 25. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} 1\Big/\sqrt[n]{n!} = 0$.

Решение. Покажем сначала (методом математической индукции), что $n! > (\frac{n}{3})^n$. При $n = 1$ неравенство выполняется. Пусть при $n = k$ имеет место $k! > (\frac{k}{3})^k$ Обе части этого неравенства умножим на $(k+1)$: $k!(k+1) > (\frac{k}{3})^k(k+1)$, или $(k+1)! > (\frac{k}{3})(k+1) = (\frac{k+1}{3})^{k+1} \cdot \frac{3}{(1+1/k)^k} > (\frac{k+1}{3})^{k+1}$, т.к. $(1+\frac{1}{k})^k < 3$ (доказать самостоятельно). Следовательно, $n! > (\frac{n}{3})^n$ справедливо при $\forall n \in N$. . Далее имеем ${}^{1}\!/_{n!} < 1\Big/\sqrt[n]{(n/3)^n} = {}^{3}\!/_{n} < \varepsilon$ при $\forall n > n_\varepsilon = [\frac{3}{\varepsilon}]$.

Пример 26. Для последовательности $\{x_n\}$ найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$ если $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Решение. Рассмотрим члены последовательности: $x_1 = -\frac{1}{1}$, $x_2 = \frac{1}{2}+1$, $x_3 = -\frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{1}{4}+1$, $x_5 = -\frac{1}{5}, \ldots$ Отсюда видно, что члены с нечетными индексами образуют последовательность -1, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{7}, \ldots$ члены которой все отрицательны, в любой левой окрестности нуля содержится бесконечное число этой подпоследовательности, отсюда нуль является предельной точкой.

Далее рассмотрим члены с четными индексами. Они образуют подпоследовательность $\{\frac{1}{2k}+1\}$, , которая сходится к 1 . Следовательно, $a = 1$ также является предельной точкой. Отсюда $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$.

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

1. Даны последовательности $\{x_n\}$ с общими членами:

$a)$ $x_n = \sin n$; $b)$ $x_n = (-1)^n$; $c)$ $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; $d)$ $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$. Какие из них ограничены, сходятся. Ответы обоснуйте.

2. Пользуясь языком $"\varepsilon - n_\varepsilon"$ докажите, что: (укажите n_ε)

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+5} = 3$; $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos 3n}{n} = 0$; $c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n - 7\cdot 6^n}{3^n + 6^n} = -7$;

$d)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{4n^2-1} = \frac{3}{4}$; $e)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n-2} = 5$; $f)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \log_n 2 = 0$.

3. С помощью $"\varepsilon - n_\varepsilon"$ рассуждений доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$ к a :

$a)$ $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $a=0$; $b)$ $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, $a=0$; $c)$ $x_n = \frac{n^2+n-2}{3n^2+2n-4}$, $a = \frac{1}{3}$; $d)$ $x_n = \sqrt[n]{c}$ $(c>1)$, $a=1$.

$\Big[$ $a)$ $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$; $b)$ $n_\varepsilon = [\frac{3}{\varepsilon}]$; $c)$ $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$; $d)$ $n_\varepsilon = [\frac{1}{\log_c(1+\varepsilon)}]$ $\Big]$.

4. Докажите, что: $a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $(a>0)$; $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}) = 0$; $d)$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $(|q|<1)$.

5. Для последовательности $\{x_n\}$ найти все предельные точки, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, если $a)$ $x_n = 1 - \frac{1}{n}$; $b)$ $x_n = (-1)^n(2+\frac{3}{n})$; $c)$ $x_n = (-1)^n$; $d)$ $x_n = n^{(-1)^n}$; $e)$ $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.
[$a)$ $0,\ 1$; $b)$ $-2,\ +2$; $c)$ $-1,\ +1$; $d)$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \infty$; $e) -1,\ 0;\ +1$, $e)$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \infty$].

6. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

[Указание: $z_n < x_n < y_n$, $z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$, $y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$].

3.2. Критерий Коши.

А. Основная теорема.

Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для $\varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; n_\varepsilon$ такое, что для $\forall n > n_\varepsilon$ и для $\forall p \in N$ выполнялось неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Вторую половину этой теоремы можно заменить : "...что для $\forall n > n_\varepsilon$ и $\forall m > n_\varepsilon$ выполнялось неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$. "

Б. Контрольные задания.

1. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности.

2. Дайте геометрическую интерпретацию этой теоремы.

В. Примеры решения задач.

Пример 27. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$.

Решение. Оценим $|x_{n+p} - x_n|$. Имеем $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)} \right| \le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + ...\left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} <$$

$$< \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Отсюда, при $n > n_\varepsilon = [\, \frac{1}{\varepsilon} - 1 \,]$ критерий Коши выполняется. Следовательно, данная последовательность сходится.

Пример 28. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $\{x_n\}$, если $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Решение. Оценим $|x_{n+p} - x_n|$. Имеем $|x_{n+p} - x_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} > \frac{p}{n+p}$. Это неравенство справедливо для $\forall n, \forall p \in N$. В частности, при $p = n$ имеем $|x_{n+p} - x_n| > {}^1\!/_2$ для $\forall n \in N$. Поэтому, если в качестве ε взять ${}^1\!/_2$, то при $\forall n$ и $n = p$, имеем: $|x_{n+p} - x_n| > \varepsilon$. Это доказывает, что наша последовательность расходится.

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, если:

$a)$ $x_n = a_0 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q^2 + ... + a_n \cdot q^n$, где $|a_k| < M$, $(k = 0, 1, 2, ...)$ и $|q| < 1$.

$b)$ $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$; $c)$ $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$; $d)$ $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $\{x_n\}$, если:

$a)$ $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^n$; $b)$ $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

3.3. Монотонные последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

А. Основные понятия и теоремы.

1. $\{x_n\}$ называется монотонно возрастающей (убывающей), если для $\forall n \in N$ (или начиная с некоторого номера) выполняется неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$. При строгом неравенстве последовательность x_n называется строго монотонной.

Теорема 1. Всякая ограниченная сверху (снизу) монотонно возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\})$.

2. $\{x_n\}$ называется бесконечно малой (б. м.), если $\forall\varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon$ такое, что $\forall \ n > n_\varepsilon : |x_n| < \varepsilon$ (пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$) .

3. $\{x_n\}$ называется бесконечно большой (б. б.), если для $\forall \ M > 0 \ \exists \ N_M$ такое, что $\forall n > N_M$: $|x_n| > M$, (пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$).

Теорема 2. Алгебраическая сумма конечного числа б.м.п. является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 3. Произведение б.м.п. на ограниченную последовательность является б.м.п.

Б. Контрольные задания.

1. Для какой последовательности ограниченность является необходимым и достаточным условием сходимости?

2. Докажите монотонность и ограниченность (снизу числом 2, сверху - числом 3) последовательности $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ существует и совпадает с числом $e \approx 2,7182818284590$.

3. Дайте геометрическую интерпретацию б.м.п. и б.б.п.

4. Пусть бесконечное число членов последовательности находится: а) в любой окрестности нуля; б) вне любой окрестности нуля. Следует ли из этих условий а) или б), что последовательность является б.м.?, б.б.?, ограниченной?, неограниченной? Следует ли из этих условий, что последовательность не является б.м.?, б.б.? (Рассмотреть пример $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$).

5. Какова связь между б.м. и б.б. последовательностями?

6. Какова связь между неограниченной и б.б.п.?

7. Пусть 1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Может ли $\{{}^{x_n}/_{y_n}\}$, где для $\forall\ n\ \ y_n \neq 0$, быть б.б.?, б.м.?, сходящейся?, расходящейся, но не б.б.? Ответы обосновать примерами.

8. Если $\{x_n + y_n\}$ – б.м.п., то $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ также б.м.. Всегда ли верно это утверждение? Ответ обоснуйте примерами.

9. Пусть $\{x_n \cdot y_n\}$– б.м.п.. Что можно сказать о $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$?

В. Примеры решения задач.

Пример 29. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$, если $q > 1$.

Решение. Действительно, если $x_n = \frac{n}{q^n}$, то $x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}} = \frac{n+1}{nq}\ x_n$ для $\forall n \in N$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} = \frac{1}{q}$ (докажите самостоятельно), то $\exists\ n_0$, что при $\forall\ n > n_0\ \ \frac{n+1}{qn} < 1$ (т.к. $\frac{1}{q} < 1$). Таким образом, при $n > n_0$ будем иметь $x_{n+1} < x_n$, т.е. после члена x_{n_0} последовательность x_n монотонно убывает. Члены последовательности положительны, она ограничена снизу. Значит, последовательность имеет предел.

Пусть a – предел $\{x_n\}$. Из соотношения $x_{n+1} = \frac{n+1}{nq} \cdot x_n$ следует $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} \cdot x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q} \cdot a$, откуда следует $(1 - \frac{1}{q})a = 0$ и $a = 0$. (Здесь мы воспользовались свойством $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(y_n)$, если пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ существуют. (Это свойство будет рассмотрено ниже).

Пример 30. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty$.

Решение. Выше (см. п.В, пример 23) мы показали, что последовательность $\{{}^{2^n}/_{n!}\}$ сходится к нулю, т.е. она б.м.. А последовательность $\{{}^1\!/_{x_n}\}$, $x_n = {}^{2^n}\!/_{n!} \neq 0$ будет б.б., т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} {}^1\!/_{x_n} = \infty$.

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

1. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастающая и ограниченная:

$a)$ $x_n = \frac{3n-1}{5n+4}$; $b)$ $x_n = \frac{2}{1-3n}$; $c)$ $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; $d)$ $x_n = 2n - \sqrt{4n^2+3}$.

2. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывающая и ограниченная:

$a)$ $x_n = \frac{1-3n}{3+2n}$; $b)$ $x_n = \frac{17}{2n+7}$; $c)$ $x_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}$;

$d)$ $x_n = \sqrt{n^2+2n+2} - n$.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $a)$ $x_1 = a$, $x_{n+1} = 2x_n - 1$. При каких a последовательность $\{x_n\}$ является монотонно возрастающей?

б) $a)$ $x_1 = b$, $x_{n+1} = 3x_n - 2$. При каких b последовательность $\{x_n\}$ является монотонно убывающей?

4. Докажите сходимость и вычислите предел последовательности $\{x_n\}$, если $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$; $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; ... ... $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ – (всего n корней). [2]

5. Докажите сходимость последовательности $\{x_n\}$, если $x_n = (1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{2^n})$.

6. Докажите сходимость последовательности $\{x_n\}$, если $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}$; $(n = 1,2,\ldots)$ где p_i $(i = 0,1,2,\ldots)$ – целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1.

7. Доказать монотонность, ограниченность и найти предел:

$a)$ $x_n = (1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n^2})$;

$b)$ $x_n = (1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{6})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}})$. [$a)$ $1/2$; $b)$ $1/3$].

3.4. Свойства сходящихся последовательностей.

А. Основные теоремы.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то а) $a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$; $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$, с) если $b \neq 0$, то начиная с некоторого номера определена последовательность $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ называется неопределенностью типа $(0/0)$. Аналогично определяются неопределенности типа $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$. Для таких неопределенностей сформулированная выше теорема не имеет места.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и $\forall\ n > n_0$ $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, то $a \geq b$ $(a \leq b)$.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, и начиная с некоторого номера выполняются неравенства $x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Б. Контрольные вопросы и задания.

1. Какая последовательность называется сходящейся ?

2. Пусть последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Следует ли отсюда сходимость $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$?

3. Докажите, что для сходимости $\{x_n\}$ к числу a необходимо и достаточно, чтобы начиная с некоторого номера n_0, $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}-$ б. м. п..

4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, причем для $\forall\, n$, $x_n > b$ $(x_n < b)$. Следует ли отсюда, что $a)$ $a > b$, $b)$ $a \geq b$? ($c)$ $a < b$, $d)$ $a \leq b$?) Приведите примеры.

В. Примеры решения задач.

Пример 31. Вычислить пределы:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2-n^2}$; $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k - n^k]$, $0 < k < 1$;

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\, [\, \sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}\,]$;

$d)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}$; $e)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, $|a| < 1$, $|b| < 1$;

$f)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2})$; $g)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$.

Решения.

$a)$ Этот предел является неопределенностью типа $\frac{\infty}{\infty}$. Числитель и знаменатель поделим на n^2, тогда получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2-n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\frac{2}{n^2}-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{n^2}-1)} = -3.$

$b)$ Мы имеем здесь неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Преобразуем, вынося n^k за скобки: $0 < (n+1)^k - n^k = n^k\,[\,(1+\frac{1}{n})^k - -1] < n^k[(1+\frac{1}{n})-1] = \frac{1}{n^{1-k}}$. Так как $\frac{1}{n^{1-k}} \to 0$, то и подавно $(n+1)^k - n^k \to 0.$

$c)$ Избавимся от иррациональности в числителе, умножая на сопряженное выражение:

$$\lim_{n\to\infty} n[\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\,[\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}]\ [\sqrt{n(n-2)}+\sqrt{n^2-3}]}{[\sqrt{n(n-2)}+\sqrt{n^2-3}]} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,(n^2-2n-n^2+3)}{[\sqrt{n(n-2)}+\sqrt{n^2-3}]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(3-2n)}{n[\sqrt{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}]} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-2n}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}} = \infty.$$

$d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(2/3)^n}{3+(2/3)^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}[1-(2/3)^n]}{\lim\limits_{n\to\infty}[3+(2/3)^n]}=\frac{1}{3}.$

$e)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\cdot\frac{1-b}{1-b^{n+1}})=$

$=\frac{1-b}{1-a}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-a^{n+1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-b^{n+1})}=\frac{1-b}{1-a};$

$f)\ \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot...\cdot\ \sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1/2+1\big/2^2+...+1/2^n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1-(1/2)^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}2^{-1/2^n}=2;$

$g)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n^2+2}\big/n^2)-5}{(1/n-\sqrt{1-1\big/n^3+1\big/n^4})}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1\big/n^4+2\big/n^6}-5}{(1/n-\sqrt{1-1\big/n^3+1\big/n^4})}=5.$

Пример 32. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если $x_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}.$

Решение. При вычислении будем пользоваться формулой

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^3+...+ab^{m-2}+b^{m-1}).$$

В нашем случае $a=\sqrt[3]{n+1}, b=\sqrt[3]{n-1}, m=3.$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-$

$-\sqrt[3]{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1})\cdot(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2})}{(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2})}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1-n+1}{(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2})}=0$, так как знаменатель стремится к ∞.

Пример 33. Написать общий член, доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$ и найти её предел, если $x_1=4; x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}.$

Решение. Здесь последовательность задана рекуррентным соотношением. Найдем общий член: $x_1 = 4$; $x_2 = \sqrt{6+4} = \sqrt{10}$, $x_3 = \sqrt{6+\sqrt{10}}$, $x_4 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{10}}}$, ... , $x_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{10}}}}}$. Последовательность монотонно убывает и ограничена снизу числом 3 . Тогда существует предел, который обозначим через c. Тогда из рекуррентного соотношения находим (в пределе) $c = \sqrt{6+c}$. Отсюда $c^2 - c - 6 = 0$, $c_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$. $c_1 = 3$, $c_2 = -2$. Пределом данной последовательности является число 3, так как все члены x_n положительны.

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

1. Приведите примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}({}^{x_n}\!/\!{}_{y_n}) = 0$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}({}^{x_n}\!/\!{}_{y_n}) = c,\ c = const \neq 0$;

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}({}^{x_n}\!/\!{}_{y_n}) = \infty$; $\ d)\ \{{}^{x_n}\!/\!{}_{y_n}\}$ расходится, но ограничена.

2. Найти пределы:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+2}$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+...+\frac{(2n-1)^2}{n^3}]$;

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n})$; $\quad d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

[$a)$ 0; $b)$ $\frac{4}{3}$; $c)$ 3; $d)$ 1].

3. Вычислить пределы:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n+1}{\sqrt{n^4+1}-n}$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$;

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$; $\quad d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+...+(2n-1)^2}{2^2+4^2+...+(2n)^2}$;

$e)\ \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3});\quad f)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}].$

[$a)$ 2; $b)$ $-\frac{1}{2}$; $c)$ 0; $d)$ 1; $e)$ $\frac{3}{2}$; $f)\frac{1}{3}$].

4. Доказать, что последовательность $\{\frac{2^n+(-2)^n}{2^n}\}$ не имеет предела, а последовательность $\{\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}\}$ имеет предел. Чему он равен? [0].

3.5. Предел последовательности комплексных чисел.

А. Основные понятия.

1. Число z_0 называется пределом последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon$ такое, что при $\forall\ n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|\ z_n - z_0\ | < \varepsilon$.

2. Последовательность $\{z_n\}$ называют сходящейся к бесконечности и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если для $\forall\ M > 0\ \exists\ n_0$ такое, что для $\forall\ n > n_0$ выполняется неравенство $|\ z_n\ | > M$.

Б. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте геометрическую интерпретацию понятиям предела последовательности и сходимости последовательности к бесконечности из предыдущего пункта.

2. Пусть заданы последовательность $\{z_n\}$, где $z_n = x_n+iy_n$ и $z_0 = x_0 + iy_0$. Докажите, что необходимым и достаточным условием сходимости $\{z_n\}$ к z_0 является сходимость последовательностей $\{x_n\}$, и $\{y_n\}$, к $\mathrm{Re} z_0 = a$, $\mathrm{Im} z_0 = b$, соответственно.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0 \neq \infty$. Доказать, что:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z_0 + w_0$; $\qquad b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0$;

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{z_n}{w_n}) = \frac{z_0}{w_0}$, где $w_0 \neq 0$, но может совпадать с ∞.

4. Сформулируйте определения ограниченности и неограниченности последовательности $\{z_n\}$, а также дайте их геометрическую интерпретацию.

В. Примеры решения задач.

Пример 34. Показать, что последовательность $\{z_n\}$, где $z_n = (-1)^n + i\frac{2-n}{2+n}$, ограничена, но расходится.

Решение. Для этого рассмотрим $|\, z_n \,| =$

$$= \sqrt{1 + (2-n)^2/(2+n)^2} = \sqrt{1 + (1 - 2n/(2+n))^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 1 - 4n/(2+n) + (2n/(2+n))^2} \leq 6 .$$

Отсюда следует ограниченность $\{z_n\}$.

Теперь покажем расходимость. Здесь $x_n = (-1)^n$. Предел этой последовательности не существует. Поэтому, даже если существует предел последовательности $\{y_n\}$ (в нашем случае $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n}{2+n} = -1$) предел $\{z_n\}$ не будет существовать.

Здесь из нашей последовательности можно выделить две подпоследовательности с членами: $z_{2k} = (-1)^{2k} + i\frac{2-2k}{2+2k} = 1 + i\frac{1-k}{1+k}$; $z_{2k-1} = (-1)^{2k-1} + i\frac{2-2k+1}{2+2k+1} = -1 + i\frac{3-2k}{3+2k}$. Эти подпоследовательности сходятся соответственно к $1 - i$ и $-1 - i$ (предельные точки).

Пример 35. Пусть φ – действительное число. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + i\frac{\varphi}{n})^n = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$.

Решение. Члены последовательности $z_n = (1 + i\frac{\varphi}{n})^n$ представим в показательной форме: $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где
$r_n = \left|(1 + i\frac{\varphi}{n})^n\right| = (1 + \frac{\varphi^2}{n^2})^{\frac{n}{2}}$,
$\varphi_n = \arg(1 + i\frac{\varphi}{n})^n = n \cdot \arg(1 + i\frac{\varphi}{n}) = n \cdot \mathrm{arctg}\ \frac{\varphi}{n}$.

Далее вычислим пределы:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}[(1 + \frac{\varphi^2}{n^2})^{\frac{n^2}{\varphi^2}}]^{\frac{\varphi^2}{2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi^2}{2n}} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \mathrm{arctg}\ \frac{\varphi}{n} = \varphi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}} = \varphi.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(1 + i\frac{\varphi}{n})^n = 1 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{i\varphi}.$$

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

1. Вычислить пределы:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty} = (-i + \frac{2+i}{n});\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-ni}{1+3ni};$

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}[3^n + i(1 - \frac{2}{n})];\quad d)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{i^k}{3^k}.$

[$a)\ -i$; $b)\ -\frac{1}{3}$; $c)\ \infty$; $d)\ \frac{3}{10} \cdot (3 + i)$].

2. Показать, что $\{z_n\}$ ограничена, но расходится, если $a)\ z_n = i^n$; $b)\ z_n = \frac{1}{2}[i^n + (-i)^n]$.

3. Показать, что $\{z_n\}$, где $z_n = \frac{1}{2}(1 + i^n)$ не ограничена,но не сходится к бесконечности.

4. Доказать сходимость и найти предел, если $a)\ z_n = z^n$, $|\,z\,| < 1$; $b)\ z_n = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|\,z\,| < 1$.

[$a)$ 0; $b)$ 0].

§4. Функция и её предел.

4.1. Понятие функции. Предел функции.

А. Основные понятия.

1°. Пусть x вещественная переменная из множества $\{X\}$. Если каждому x из $\{X\}$ поставлено в соответствие одно вещественное y из $\{Y\}$, то говорят, что на $\{X\}$ задана функция, и пишут $y = f(x)$ (т.е. $f : \{X\} \to \{Y\}$). $\{X\}$ – называется областью определения функции, а совокупность $\{Y\}$ всех частных значений функции называется множеством значений функции $f(x)$.

Множество $\{X\}$ может быть: интервалом (a, b), отрезком (сегментом) $[a, b]$, полуотрезком $[a, b)$ или $(a, b]$, полупрямой $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$, всей бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$. Множество $\{X\}$ может представлять собой систему интервалов или отрезков или их комбинацию, а также состоять из дискретных точек.

2°. Функция $y = f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на множестве $\{X\}$, если для $\forall x_1, x_2 \in \{X\}$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$. Неубывающие и невозрастающие функции объединяются одним общим названием: *монотонные функции.* Если для $\forall x_1, x_2 \in \{X\}$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, то функция $y = f(x)$ называется *строго монотонно возрастающей (убывающей) функцией.*

3°. Если под x понимать любое значение, удовлетворяющее уравнению $y = f(x)$, где y фиксированное число из $\{Y\}$, то это соответствие определяет на множестве $\{Y\}$ некоторую, вообще говоря многозначную функцию $x = f^{-1}(y)$, называемую *обратной* по отношению к функции $f(x)$. Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$, называются *взаимно обратными.* Они обладают следующими свойствами: $f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x$. Если функция $y = f(x)$ монотонна в строгом смысле, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, также строго монотонная в том же смысле.

4°. Точка x_0 ($x_0 \in \{X\}$ или $x_0 \notin \{X\}$) называется предельной точкой множества $\{X\}$, если в любой окрестности точки x_0 имеются точки $\{X\}$, отличные от точки x_0.

Определение 1. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, при $x \to x_0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon$ такое, что $\forall\, x$, удовлетворяющего условиям $x \in \{X\}$, $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $|\, f(x) - b \,| < \varepsilon$.

Определение 2. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in \{X\}$, $x_n \neq x_0$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to x_0$. Справедлива следующая теорема.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме может быть самой точки x_0, и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c$. Тогда: *a*) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$; *b*) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$; *c*) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ при условии, что $c \neq 0$.

5°. Односторонние пределы.

Число b называется правым (левым) пределом функции

$f(x)$ в точке x_0, если $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, x$ удовлетворяющего условиям $x \in \{X\}$, $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ $(x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначения: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = b$ или $f(x_0 + 0) = b$ (соответственно $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = b$ или $f(x_0 - 0) = b$).

6°. Предел функции при $x \to \infty$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b]$, если $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, A_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, x > A_\varepsilon$ выполняется неравенство $|\, f(x) - b\, | < \varepsilon$. Аналогично определяется $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Б. Контрольные вопросы и задания.

1. Докажите эквивалентность двух определений предела функции в точке x_0.

2. Дайте геометрическую интерпретацию предела функции.

3. Докажите, что если существует предел функции в точке x_0, то он единственный.

4. Сформулируйте отрицания двух определений предела функции в точке.

5. Сформулируйте определение односторонних пределов в точке на языке последовательностей.

6. При каких условиях из существования односторонних пределов (предела функции) следует существование предела функции (односторонних пределов)?

7. Сформулируйте два определения предела функции при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

8. Дана функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Определена ли она в точке $x = 0$? Является ли точка $x = 0$ предельной точкой области

определения функции? Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

B. Примеры решения задач.

Пример 36. Определить область существования функций: $a)$ $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$; $b)$ $y=(x+|x|)\sqrt{x\sin^2\pi x}$; $c)$ $y=(2x)!$

Решение. $a)$ Выражение имеет смысл при условии, что $\sin\sqrt{x}\geq 0$, то есть если $2k\pi\leq\sqrt{x}\leq\pi+2k\pi$, $(x\geq 0)$ $(k=0,1,2,...)$. Отсюда $4k^2\pi^2\leq x\leq\pi^2(1+2k)^2$ $(k=0,1,2,...)$.

$b)$ Выражение $x+|x|$ имеет смысл всегда, следовательно, произведение определено, если $x\cdot\sin^2\pi x\geq 0$. Решая это неравенство, находим, что $x\geq 0$ и $x=-1,-2,...$.

$c)$ Эта функция имеет смысл, если $2x=n$ $(n=1,2,...)$ поэтому область определения есть множество $\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,...\}$.

Пример 37. Определить область существования и множество значений функций: $a)$ $y=(-1)^x$; $b)$ $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$;

$$c)\ \ y=D(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ иррациональное число},\\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное число}.\end{cases}$$

$$d)\ \ y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}+1, \text{ если } x>0,\\ 0, \text{ если } x=0,\\ -1, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

Решение. $a)$ Область определения функции состоит только из рациональных чисел. Так как $(-1)^x=\pm 1$ то действительный корень этого уравнения существует только при нечётном показателе корня, $x=\frac{p}{2q+1}$, где p и q целые числа. При этом $y=\pm 1$.

$b)$ Очевидно, что $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1$ при $\forall\ x\ \in R$. Поэтому область определения есть вся числовая ось $(-\infty, +\infty)$, а область значений есть сегмент $[\,0,\ \pi\,]$.

$c)$ Функция задана на всей числовой оси а множество её значений состоит из двух точек 0 и 1, то есть $\{y\} = \{0, 1\}$. Эта функция называется функцией Дирихле.

$d)$ Функция задана на всей числовой оси, множество её значений состоит из трех точек: $-1,\ 0,\ +1$, то есть $\{y\} = \{-1,\ 0,\ +1\}$.

Пример 38. Пусть $f(x) + f(y) = f(z)$. Определить z, если $a)$ $f(x) = \frac{1}{x}$; $b)$ $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. $a)$ Из условия $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ находим $z = \frac{xy}{x+y}$, $x \ne -y$.

$b)$ Потенцируя равенство $\log\frac{1+x}{1-x} + \log\frac{1+y}{1-y} = \log\frac{1+z}{1-z}$, находим, что $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+z}{1-z}$, откуда $z = \frac{x+y}{1+xy}$.

Пример 39. Найти $f(x)$, если $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$ $(x > 0)$.

Решение. Пусть $z = 1/x$. Тогда $x = 1/z$ и, так как $z > 0$, то $f(z) = 1/z + \sqrt{1 + 1/z^2} = 1/z + \frac{\sqrt{1+z^2}}{|z|} = \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}$. Отсюда $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Пример 40. Определить обратную функцию $x = \varphi(y)$ и область её существования, если: $a)$ $y = \sqrt{1-x^2}$ при 1) $-1 \le x \le 0$; 2) $0 \le x \le 1$; $b)$ $y = \operatorname{sh} x = 1/2(e^x - e^{-x})$ – гиперболический синус.

Решение. $a)$ На сегменте $[\,-1,\ 0\,]$ функция монотонно возрастает от 0 до 1. Поэтому существует обратная функция. Решая равенство относительно x находим:

$x = -\sqrt{1-y^2}$, $\quad (0 \le y \le 1)$. Аналогично предудущему случаю на $[\ 0, +1\ ]$ функция монотонно убывает от 1 до 0. Имеем: $x = \sqrt{1-y^2}$, $\quad (0 \le y \le 1)$.

$b)$ Так как на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $\operatorname{sh} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, то на интервале $-\infty < y < +\infty$ существует единственная обратная функция. Имеем $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, откуда $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Выбирая в последнем равенстве знак $(+)$ (так как $e^x > 0$) и логарифмируя, получим $x = Arsh\, y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, $\quad (-\infty < y < +\infty)$.

Пример 41. Показать, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Возьмём последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$. Эта последовательность при $n \to \infty$ стремится к нулю, а соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) = (-1)^n$ вовсе не имеет предела. Следовательно, данная функция не имеет предела в точке $x = 0$.

Пример 42. На языке "$\varepsilon - \delta_\varepsilon$" показать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} \sin x = 1$.

Решение. Оценим разность $|\ 1 - \sin x\ |$. Имеем $1 - \sin x = 2\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$. Так как для любого x : $\left|\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\right| \le 1$ и $\left|\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\right| \le \left|\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right|$, то $|1 - \sin x| \le \left|\frac{\pi}{2} - x\right|$. Следовательно, если $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, то из неравенства $0 < \left|\frac{\pi}{2} - x\right| < \delta_\varepsilon$ следует неравенство $|\ 1 - \sin x\ | < \varepsilon$. Таким образом, для $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta_\varepsilon = \varepsilon$, $\forall\ x : 0 < \left|\frac{\pi}{2} - x\right| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |1 - \sin x| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{x\to\pi/2} \sin x = 1$.

Пример 43. Пусть $f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x\ < 0, \\ \sin x, & \text{при } x\ > 0. \end{cases}$ ($f(x)$ не определена при $x = 0$.) Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Решение. Вычислим в точке $x = 0$ односторонние пределы функции $f(x)$. $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+0} \sin\ x = \lim\limits_{x\to +0} \sin\ x = 0$; $f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0-0} x = \lim\limits_{x\to -0} x = 0$. Односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x = 0$ существуют и равны 0. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$; $[1]$.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}$; $\left[\dfrac{4}{27}\right]$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$; $[1]$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}}$; $[0]$.

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1})$; $[3]$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}+x}$; $\left[\dfrac{1}{6}\right]$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$; $\left[\frac{10}{3}\right]$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[(1+mx)^n-(1+nx)^m]}{x^2}$; $m,n\in N$; $\left[\dfrac{mn(m-n)}{2}\right]$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$; $m,n\in N$; $\left[\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}\right]$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\cdot\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$; $\left[\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{n}\right]$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{1-x}$; $\left[-\dfrac{n(n-1)}{2}\right]$.

4.2. Раскрытие неопределенностей.

А. Основные понятия.

Рассмотрим функцию $f(x)/g(x)$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, то предел функции $f(x)/g(x)$ при $x\to x_0$ нельзя найти пользуясь теоремой о пределе отношения, так как предел знаменателя равен нулю. В этом случае говорят, что имеется неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Здесь x_0 может быть конечным числом или $\pm\infty$. Аналогично вводятся символические обозначения неопределенностей $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞. В тех случаях, когда имеет место неопределённость, для вычисления предела – "раскрытия неопределённости" – преобразовывают отношение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные соотношения, либо сравнение поведения функций при стремлении аргумента к предельной точке.

В. Примеры решения задач.

Пример 44. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

Решение. При $x \to 2$ числитель и знаменатель стремятся к нулю, то есть $x_0 = 2$ является корнем числителя и знаменателя. В окрестности точки $x = 2:$ $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$, $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. Поэтому

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x-1)}=5.$$

Пример 45. Вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)$ (неопределённость типа $\infty-\infty$).

Решение. Если $x<0$, то

$$\sqrt{x^2+4x+5}+x=\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\frac{4+5/x}{-\sqrt{1+4/x+5/x^2}-1},$$

следовательно $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)=-2.$

Пример 46. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$ (неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$).

Решение. Вынося за скобки в числителе и знаменателе старшие степени x, находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x+\ln(1-1/x+1/x^2)}{10\ln x+\ln(1+1/x+1/x^{10})}=\frac{1}{5}.$$

Пример 47. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi+0}\sqrt{1+\cos x}\cdot tg\frac{x}{2}$ (неопределённость типа $0\cdot\infty$.)

Решение. Если $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = -\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$. $\lim\limits_{x\to\pi+0}\sqrt{1+\cos x}\cdot tg\frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to\pi+0}(-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cdot tg\frac{x}{2}) = -\sqrt{2}$.

Раскрытие неопределенностей типа ∞^0, 0^0, 1^∞ производится , пользуясь формулой $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{v(x)\cdot\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[v(x)\cdot\ln u(x)]}$. Здесь $u(x) > 0$, показательная функция непрерывна (что будет рассмотрено позднее).

Пример 48. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0} x^x$ (неопределённость типа 0^0).

Решение. $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x}$. Положим $x = 2^{-\alpha}$. Тогда условие $x\to+0$ эквивалентно условию $\alpha\to+\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{-\alpha\ln 2}{2^\alpha} = 0$. Следовательно $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^0 = 1$.

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

1. С помощью "$\varepsilon - A_\varepsilon$" рассуждений доказать:

$a)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ при $a > 1$; $b)$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a^x = +\infty$ при $0 < a < 1$ и найти A_ε; $c)$ при $a > 1$ $\lim\limits_{x\to+0}\log x = -\infty$.

2. С помощью "$\varepsilon - \delta_\varepsilon$" рассуждений доказать, что

$\lim\limits_{x\to+0} x^k\log_a x = 0, \quad (a > 1,\ k > 0)$.

3. Дано $y = x^2$. Когда $x\to 2$, то $y\to 4$. Каково должно быть δ чтобы из $|x-2| < \delta$ следовало $|y-4| < \varepsilon = 0,001$? [$\delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$; $\delta < 0,00025$].

4. Пусть $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. При $x \to 2$ имеем $y \to \frac{3}{5}$. Каково должно быть δ чтобы из $|x-2| < \delta$ следовало $\left|y - \frac{3}{5}\right| < 0,1$? $[\ \delta < 2 - \sqrt{3}\ ]$.

5. Пусть $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$. При $x \to 3$ имеем $y \to \frac{1}{4}$. Каково должно быть δ чтобы из $|x-3| < \delta$ следовало $\left|y - \frac{1}{4}\right| < 0,01$? $[\ \delta < \frac{2}{13}\ ]$.

6. Доказать, что $\sin x$ стремится к единице при $x \to \frac{\pi}{2}$. Каким условиям должен удовлетворять x в окрестности точки $x = \frac{\pi}{2}$, чтобы имело место неравенство $1 - \sin x < 0,01$? $[\ \left|\ x - \frac{\pi}{2}\ \right| < \frac{\pi}{2} - \arcsin 0,99 = 0,133\ ]$.

7. При неограниченном возрастании x функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ стремится к нулю: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. Каково должно быть A_ε, чтобы из $|x| > A_\varepsilon$ следовало $y < \varepsilon$? $[\ A_\varepsilon \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, при $\varepsilon < 1\ ]$.

8. Если $x \to +\infty$, то $y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$. Каково должно быть A_ε, чтобы из $|x| > A_\varepsilon$ следовало $|y-1| < \varepsilon$?
$\left[\ A_\varepsilon \geq \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 3},\right.$ при $\left.\varepsilon < \frac{4}{3}\ \right]$.

9. Вычислить: $a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x} - x)$; $b)\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1} + x)$;

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x} - 4\sqrt[4]{1+x} + 1}{2 - 2\sqrt{1-x} - x}; \quad d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[5]{x^5+2}}{x};$$

$$e)\ \lim_{x\to 5} \frac{4 - \sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13} + 2};$$

$$f)\ \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+x-1}\right).$$

$[\ a)$ 1; $b)$ $-\frac{1}{2}$; $c)$ $\frac{1}{16}$. Указание: положить $x = t^{12} - 1$; $d)$ 0; $e)$ $\frac{3}{2}$; $f)$ $\frac{2}{3}\ ]$.

Замечание: Здесь мы не рассматриваем примеры на два замечательных предела: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Примеры на эти замечательные пределы имеются в большом количестве в "Сборнике задач и упражнений по математическому анализу" Б. П. Демидовича.

4.3. Непрерывность функции.

А. Основные понятия.

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки $x_0\in\{X\}$. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, то есть если $\forall\varepsilon>0\exists\ \delta_\varepsilon(x_0)>0$ такое, что при $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Заметим, что в этом определении предполагается, что $f(x)$ определена в некоторой окрестности и в самой точке x_0, предполагается также существование предела в этой точке и равенство этого предела значению функции в этой точке. Если нарушено хотя бы одно из указанных условий, то точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Функция $f(x)$, определённая на $(a,x_0]$ $([x_0,b))$ называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)\right)$.

Если $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества $\{X\}$, то она называется непрерывной на $\{X\}$.

Точки разрыва бывают:

1) устранимого разрыва, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ но либо $f(x)$ не определена в точке x_0, либо $f(a) \neq b$; (если положить $f(a) = b$, то функция $f(x)$ станет непрерывной в точке x_0, то есть разрыв будет устранён).

2) разрыва первого рода, если существуют $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, но $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$;

3) разрыва второго рода, если в точке x_0 не существует по крайней мере один из односторонних пределов функции.

Имеют место следующие теоремы.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, ${}^{f(x)}\!/_{g(x)}$ также непрерывны в точке x_0 (частное – при условии, что $g(x_0) \neq 0$).

Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $u = f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $u = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Б. Контрольные вопросы и задания.

1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке.

2. Найдите точки разрыва функции Дирихле. Укажите типы этих точек разрыва.

3. Укажите тип точки разрыва функции $f(x)$: $a)$ $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $b)$ $f(x) = {}^{|x|}\!/_{x}$.

4. Пусть $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, ${}^{f(x)}\!/_{g(x)}$ непрерывны в точке x_0. Следует ли отсюда, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0? Приведите примеры.

5. Что можно сказать о непрерывности в точке x_0 функций $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, и $f(x)\cdot g(x)$, если

а) функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $g(x)$ разрывна в этой точке.

б) функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке x_0. Рассмотрите примеры:

1°. $f(x) = sgn\ x$, $g(x) = 2sgn\ x$.

2°. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} {}^1\!/_x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

6. Привести пример ограниченной в некоторой окрестности x_0 функции, для которой $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ не существует, а $\lim\limits_{x\to-0} f(x)$ существует. $\left[f(x) = \begin{cases} \sin {}^1\!/_x, & x > 0 \\ \cos x, & x < 0 \end{cases} \right]$

7. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция?

$\left[\text{Нет.} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \ \text{– рациональное} \\ -1, & x \ \text{– иррациональное} \end{cases} \right]$

B. Примеры решения задач.

Пример 49. С помощью "$\varepsilon - \delta_\varepsilon$" рассуждений доказать непрерывность следующих функций: $a)$ $\sqrt[3]{x}$; $b)$ $arctg\ x$.

Доказательство. $a)$ $\left| \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0} \right| = \frac{|\ x-x_0\ |}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\cdot x_0}+\sqrt[3]{x_0^2}} = = \frac{|x-x_0|}{(\sqrt[3]{x}+1/2\cdot\sqrt[3]{x_0})^2+3/4\cdot\sqrt[3]{x_0^2}} \leq \frac{|x-x_0|}{3/4\cdot\sqrt[3]{x_0^2}} < \varepsilon$, $(x_0 \neq 0)$, если $|x-x_0| < 3/4\cdot\sqrt[3]{x_0^2}\cdot\varepsilon = \delta_\varepsilon(x_0)$.

$b)$ Пусть $|x_0| > 0$ и $|h| = |x - x_0| < |x_0|$. Если $arctg\,(x_0 - h) - arctg\,x_0 = t$, то $tg\,t = \frac{h}{1+x_0^2+hx_0}$. Так как $|\,t\,| < |\,tg\,t\,|$ при $|\,t\,| < \frac{\pi}{2}$, то $|\,arctg\,(x_0 - h) - arctg\,x_0\,| < |\,t\,| < |\,tg\,t\,| = \left|\frac{h}{1+x_0^2+hx_0}\right| < \frac{|\,h\,|}{1+x_0^2+hx_0} < \varepsilon$, если $|\,h\,| = |\,x - x_0\,| < \frac{(1+x_0^2)\varepsilon}{1+|\,x_0\,|\varepsilon} = \delta_\varepsilon(x_0)$. Непрерывность $arctg\,x$ при $x_0 = 0$ следует из неравенства $|\,arctg\,x - arctg\,0\,| \leq |\,arctg\,x\,| < |\,x\,|$.

Пример 50. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0)$ произвольно.

Решение. Рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ где $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $x'_n = \frac{1}{\pi(1+4n)}$, $(n = 1, 2, ...)$. Так как при $n \to +\infty$ $x_n \to 0$, $x'_n \to 0$, а $f(x_n) \to 0$, $f(x'_n) \to 1$, то предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует. Это значит, что $f(x)$ терпит разрыв второго рода при $x = 0$. Если $x \neq 0$, то непрерывность очевидна.

Пример 51. Определить точки разрыва и исследовать характер этих точек, если $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\Big/\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)$

Решение. Функция не определена при $x = -1, 0, +1$. Так как $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1\pm 0}\frac{x-1}{x+1} = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x+1} = -1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1} = 0$, то $x = 0$ и $x = +1$ – устранимые точки разрыва, а $x = -1$ – точка бесконечного разрыва.

Пример 52. Исследовать на непрерывность сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ если $f(x) = \mathrm{sgn} x$ и $g(x) = x\cdot(1 - x^2)$.

Решение. $f(g(x)) = \mathrm{sgn}[x\cdot(1 - x^2)] =$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если } \ -1 < x < 0 \ \text{ или } 1 < x < \infty; \\ 0, \text{ если } \ x = 0, \ x = 1, \ x = -1; \\ -1, \text{ если } \ -\infty < x < -1, \ \text{ или } \ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что точки $x = -1$, $x = 0$, $x = +1$ являются точками разрыва первого рода.

Из того, что $g(f(x)) = \text{sgn } (1 - \text{sgn}^2 x) \equiv 0$, следует непрерывность функции $g(f(x))$ на $(-\infty, \infty)$.

Пример 53. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = x[x]$.

Решение. Если $n < x < n + 1$ где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ то $f(x) = nx$. Следовательно, при этих значениях аргумента функция непрерывна. Для исследования на непрерывность в точках $x = n$ положим $x = n - h$, где $0 < h < 1$. Поскольку $f(n) = n[n] = n^2$, $f(n-0) = \lim\limits_{n \to +0} f(n-h) = \lim\limits_{n \to +0} (n-h)[n-h] = = n(n-1)$, то точки $x = n$ являются точками разрыва первого рода.

Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

1. С помощью $"\varepsilon - \delta_\varepsilon"$ рассуждений доказать непрерывность следующих функций: $a)$ x^3, $b)$ $\sqrt{x}$, $c)$ $\sin x$, $d)$ $\cos x$.

2. Исследовать на непрерывность следующие функции:

$a)$ $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

[Непрерывна.]

$b)$ $f(x) = 1 \big/ (1 + e^{1/(x-1)})$, если $x \neq 1$ и $f(1)$ – произвольна.

[Разрывна при $x = 1$].

$c)$ $f(x) = x - [x]$ [$x = k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ - точки разрыва первого рода].

$d)$ $f(x) = 1 - e^{-1/x^2}$. [$x = 0$ – устранимая точка разрыва].

$e)$ $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$. [$x = -1$ и $x = 3$ - точки бесконечного разрыва].

$$f) \ \ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{при} \quad 1 < x \leq 2. \end{cases} \qquad [\text{ Непрерывна }].$$

$$g) \ \ f(x) = \begin{cases} ctg^2 \pi x & \text{для нецелого } \ x, \\ 0 & \text{для целого } \ x. \end{cases}$$

[$x = k$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ - точки бесконечного разрыва].

СОДЕРЖАНИЕ.

§1. Метод математической индукции. 4
А. Основные понятия и теоремы 4
Б. Контрольные вопросы и задания. 6
В. Примеры решения задач. 7
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. ... 13
§2. Комплексные числа. 17
А. Основные понятия и теоремы. 17
Б. Контрольные вопросы и задания. 21
В. Примеры решения задач. 22
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. ... 25
§3. Числовая последовательность. 32
3.1. Предел последовательности.
Предельные точки. 32
А. Основные понятия и теоремы. 32
Б. Контрольные вопросы и задания. 33
В. Примеры решения задач. 35
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. ... 37
3.2. Критерий Коши. 39
А. Основная теорема. 39
Б. Контрольные задания. 39
В. Примеры решения задач. 39
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. ... 40
3.3. Монотонные последовательности. Бесконечно
малые и бесконечно большие последовательности. ... 40
А. Основные понятия и теоремы 40
Б. Контрольные задания. 41

В. Примеры решения задач. 42
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. . . . 43
3.4. Свойства сходящихся последовательностей. . . . 44
А. Основные теоремы. 44
Б. Контрольные вопросы и задания. 44
В. Примеры решения задач. 45
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. . . . 47
3.5. Предел последовательности комплексных чисел. 48
А. Основные понятия. 48
Б. Контрольные вопросы и задания. 48
В. Примеры решения задач. 49
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. . . . 50
§4. Функция и её предел. 51
4.1. Понятие функции. Предел функции. 51
А. Основные понятия. 51
Б. Контрольные вопросы и задания. 53
В. Примеры решения задач. 54
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. . . . 57
4.2. Раскрытие неопределенностей. 58
А. Основные понятия. 58
В. Примеры решения задач. 59
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. . . . 60
4.3. Непрерывность функции. 62
А. Основные понятия. 62
Б. Контрольные вопросы и задания. 63
В. Примеры решения задач. 64
Г. Задачи и упражнения для самостоятельной работы. . . . 66